SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

N. GAROFALO

# CRITERIO DI WIENER PER EQUAZIONI PARABOLICHE A COEFFICIENTI C1 DINI

17 MARZO 1988

1. In questa nota esponiamo alcuni recenti risultati sul comportamento alla frontiera di soluzioni di equazioni paraboliche ottenuti nel lavoro [FGL], in collaborazione con E. Fabes e L. Lanconelli. Un problema a lungo rimasto irrisolto è stato quello di dare un criterio geometrico caratterizzante quegli aperti limitati di $R^{n+1}$ per cui la soluzione del problema di Dirichlet converga al dato alla frontiera. Per l'operatore di Laplace in $R^n$ tale problema fu risolto da N. Wiener nel 1924 nel suo famoso lavoro [W]. Nel 1982 L. Evans e R. Gariepy hanno ottenuto l'analogo del criterio di Wiener per l'operatore del calore in $R^{n+1}$, $H = \Delta - D_t$, v. [EG]. Recentemente, E. Lanconelli e chi scrive hanno dimostrato il criterio di Wiener per un operatore parabolico a coefficienti variabili e $C^\infty$, v [GL1]. Tale risultato include quello precedente di Evans e Gariepy.

In [FGL] viene ripreso lo studio iniziato in [GL1] per estenderne i risultati a operatori parabolici simili a quelli là considerati, ma verificanti ipotesi minime di regolarità dei coefficienti. Specificatamente, si considerano operatori in $R^{n+1}$ del tipo

$$(1.1) \qquad L = \operatorname{div}(A(x,t)\nabla_x) - D_t \quad ,$$

dove sulla funzione a valori matriciali $(x,t) \to A(x,t) = (a_{ij}(x,t))$ si fanno le seguenti ipotesi:

(1.2) esiste $\nu \in (0,1]$ tale che per ogni $(x,t) \in R^{n+1}$, $\xi \in R^n$

$$\nu|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \nu^{-1}|\xi|^2 \quad ;$$

(1.3) $\quad a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t) \quad , \quad i,j = 1,\dots,n$ ;

(1.4) $\quad a_{ij}$ è $C^1$-Dini continuo, $\quad i,j = 1,\dots,n$.

Spieghiamo la (1.4). D'ora in poi indichiamo con le lettere $z,\zeta,z_o,\zeta_o$ rispettivamente i punti $(x,t)$, $(\xi,\tau)$, $(z_o,t_o)$, $(\xi_o,\tau_o)$ di $R^{n+1}$. Se $z \in R^{n+1}$ po-

niamo $\|z\|^2 = |x|^2 + |t|$, dove $|x|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$. La (1.4) significa che esiste una funzione crescente

$$\omega : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty) ,$$

detta il $C^1$- *Dini modulo di continuità di* A, tale che

$$\int_0^1 \omega(\delta)\, \frac{d\delta}{\delta} < +\infty ,$$

e tale che per ogni $z,\zeta \in R^{n+1}$

$$(1.6) \qquad \begin{aligned} &|a_{ij}(z) - a_{ij}(\xi)| \leqq \omega(\|z-\xi\|) \quad , \quad i,j = 1,\dots,n, \\ &|D_{x_k} a_{ij}(z) - D_{x_k} a_{ij}(\zeta)| \leqq \omega(\|z-\zeta\|) \quad , \quad i,j,k = 1,\dots,n. \end{aligned}$$

Facciamo anche l'ipotesi che esista un compatto $F_0 \subset R^{n+1}$ tale che

$$(1.7) \qquad a_{ij}(z) = \delta_{ij} \quad , \quad i,j = 1,\dots,n \ , \quad \text{se} \quad z \in R^{n+1} \setminus F_0 .$$

Esiste allora la soluzione fondamentale $\Gamma$ di Lin (1.1) e risulta $\Gamma \in C^{2,1}(R^{n+1} \times R^{n+1}) \setminus \Delta)$, se $\Delta$ è la diagonale in $R^{n+1} x R^{n+1}$. Per enunciare i risultati abbiamo bisogno d'introdurre alcune notazioni e definizioni.

Un aperto limitato $U \subset R^{n+1}$ si dice L- *regolare* se per ogni $\phi \in C(\partial U)$ esiste un'unica $H_\phi^U \in C^{2,1}(U) \cap C(\bar{U})$, tale che $LH_\phi = 0$ e per cui per ogni $z_0 \in \partial U$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in U}} H_\phi(z) = \phi(z_0).$$

Dato un aperto $D \subset R^{n+1}$, una funzione $w : D \to \bar{R}$ si dice L- *superbolica* in D se: (i) $-\infty < w \leqq +\infty$, $w < +\infty$ in un sottoinsieme denso in D; w è inferiormente semi-continua; (iii) per ogni aperto $U \subset \bar{U} \subset D$ L-regolare, e ogni $\phi \in C(\partial U)$, se $w|_\partial \geqq \phi$,

allora $w \geq H^u_\phi$ in U. Dato un aperto limitato $D \subset R^{n+1}$ la soluzione generalizzata del problema di Dirichlet

$$(1.8)\qquad \begin{cases} Lu = 0 & \text{in } D, \\ u\big|_{\partial D} = \phi, & \phi \in C(\partial D), \end{cases}$$

è data da

$$(1.9)\qquad u(z) = \inf\{w(z) \mid w \text{ è L-superparabolica in } D,\ \underline{\lim}\ w \geq \phi \text{ su } \partial D\}.$$

Classicamente, si dimostra che

$$u \in C^{2,1}(D).$$

Tuttavia, non è vero in generale che

$$u \in C(\bar{D}).$$

Quei punti $z_0 \in \partial D$ per cui si verifica che

$$(1.10)\qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} u(z) = \phi(z_0) \quad \text{per ogni } \phi \in C(\partial D),$$

si dicono L-*regolari*.

In [FGL] si dà una caratterizzazione geometrica della L-regolarità sotto le ipotesi (1.2)-(1.7). Dato un chiuso $F \subset R^{n+1}$ sia $M^+(F)$ l'insieme delle misure di Radon non negative supportate in F. Se $\mu \in M^+(R^{n+1})$ si dice *L-potenziale* di $\mu$

$$(1.11) \qquad \Gamma_{\mu}(z) = \int_{R^{n+1}} \Gamma(z;\zeta)d\mu(\zeta).$$

Se $F \subset R^{n+1}$ è un chiuso la L-*capacità* di F è

$$(1.12) \qquad \mathrm{cap}_L(F) = \sup\{\mu(R^{n+1}) \mid \mu \in M^+(F),\ \Gamma_{\mu} \leq 1 \text{ su } R^{n+1}\}.$$

Infine, se $z_0 \in R^{n+1}$, $\lambda \in (0,1)$ e $k \in N$ poniamo

$$(1.13) \qquad A(z_0;\lambda^k) = \{\zeta \in R^{n+1} \mid (4\pi\lambda^{k+1})^{-\frac{n}{2}} \geq \Gamma(z;\zeta) \geq (4\pi\lambda^k)^{-\frac{n}{2}}\} \cup \{z_0\}$$

Il risultato principale in [FGL] è dato da

Teorema 1.1. (Criterio di Wiener). *Sia* L *un operatore parabolico come in* (1.1), *verificante* (1.2)-(1.7). *Dato un aperto limitato* $D \subset R^{n+1}$ *un punto* $z_0 \in \partial D$ *è* L-*regolare se e solo se per ogni* $\lambda \in (0,1)$

$$(1.14) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-kn/2} \mathrm{cap}_L(D^c \cap A(z_0;\lambda^k)) = +\infty ,$$

*dove* $D^c = R^{n+1} \setminus D$. *Il comportamento della serie in* (1.14) *non dipende da* $\lambda \in (0,1)$.

Prima di descrivere a grandi linee gli strumenti necessari alla dimostrazione del Teorema 1.1, riportiamo una versione integrale di (1.14). Abbiamo bisogno di una definizione. Sia $z \in R^{n+1}$ e sia $r>0$. La *palla* L-*parabolica* "centrata" in z e di raggio r è così definita

$$(1.15) \qquad \Omega_r(z) = \{\zeta \in R^{n+1} \mid \Gamma(z;\zeta) > (4\pi r)^{-\frac{n}{2}}\} ,$$

dove $\Gamma$ rappresenta la soluzione fondamentale di L in (1.1). Nel seguito, se D è un dato aperto limitato in $R^{n+1}$ e $z\in\partial D$, $r>0$, poniamo

$$(1.16)\qquad D_r^c = D^c\cap\Omega_r(z),$$

se $D^c = R^{n+1}\setminus D$. Se $H = \Delta - D_t$ e K è la soluzione fondamentale di H

$$(1.17)\qquad K(z;\zeta)=K(z-\zeta) = \begin{cases} (4\pi(t-\tau))^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|}{4(t-\tau)}\right), & t>\tau,\\ 0, & t\le\tau,\end{cases}$$

denotiamo con $cap_H(\cdot)$ la capacità calorica definita come in (1.12), se in quest'ultima si sostituisce $\Gamma$ con K.

<u>Proposizione 1.1.</u> *Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(i) $$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-kn/2}\, cap_L(D^c\cap A(z_o;\lambda^k)) = +\infty \quad \textit{per ogni } \lambda\in(0,1).$$

(ii) $$\int_0^1 r^{-\frac{n}{2}}\, cap_L(D_r^c(zo))\, \frac{dr}{r} = +\infty.$$

(iii) $$\int_0^1 r^{-\frac{n}{2}}\, cap_H(D_r^c(zo))\, \frac{dr}{r} = +\infty.$$

(iv) $$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-kn/2}\, cap_H(D^c\cap A(z_o;\lambda^k)) = +\infty \quad \textit{per ogni } \lambda\in(0,1).$$

<u>Osservazione</u> Usando l'equivalenza fra (1.14) nel Teorema 1.1 e (ii) nella Proposizione 1.1 è immediato riconoscere che il comportamento della serie in (1.14) non dipende da $\lambda\in(0,1)$.

Il Teorema 1.1 estende al caso degli operatori parabolici sopra considerati un analogo risultato dimostrato in [GL1] per operatori a coefficienti $C^\infty$. Va comunque osservato che la dimostrazione del Teorema 1.1 si basa in modo fondamentale, oltre che sui risultati più sotto descritti, sugli strumenti sviluppati nel caso $C^\infty$ in [GL1] e nel concomitante lavoro [GL2]. Questo punto verrà chiarito più avanti.

Caratterizzare geometricamente i punti regolari di un dominio limitato di $R^{n+1}$ è un tipico problema per cui si richiede una conoscenza quantitativamente dettagliata della soluzione fondamentale dell'operatore in questione.

Per illustrare quest'osservazione ricordiamo la seguente stima dovuta ad Aronson. Sia $\Gamma$ la soluzione fondamentale di L in (1.1). Allora esistono quattro costanti positive $C_1$, $C_2$, $\alpha_1$,$\alpha_2$, dipendenti solo dalla dimensione n e da $\nu$ in (1.2), tali che se $K_{\alpha_i}$ denota la soluzione fondamentale di $H_{\alpha_i} = \alpha_i\Delta - D_t$, i = 1,2, allora (cfr. [A])

$$(1.18) \qquad C_1 K_{\alpha_1}(z-\zeta) \leq \Gamma(z;\zeta) \leq C_2 K_{\alpha_2}(z,\zeta) \quad , \quad z,\zeta \in R^{n+1}.$$

Sfortunatamente,(1.18) non è sufficiente a dimostrare il Teorema 1.1: un ben noto esempio di Petrovskii [Pe] dice, infatti, come costruire domini aventi punti di frontiera regolari per $H_{\alpha_2}$, ma non regolari per $H_{\alpha_1}$ (osserviamo che in (1.18) risulta $\alpha_1 < \alpha_2$). Tale ostruzione geometrica riflette l'impossibilità di rovesciare in (1.18) il confronto fra $K_{\alpha_1}$ e $K_{\alpha_2}$. Infatti

$$\frac{K_{\alpha_1}(z;o)}{K_{\alpha_2}(z;o)} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right)\right) \quad , \quad t > 0,$$

e quindi non esiste alcuna costante C>0 tale che

$$K_{\alpha_2}(z-\zeta) \leq CK_{\alpha_1}(z-\zeta).$$

Incidentalmente, ricordiamo un famoso risultato di LIttman, Stampacchia e Weinberger [LSW]. Sia

$$E = \operatorname{div}(A(x)\nabla_x)$$

un operatore uniformemente ellittico in $R^n$ a coefficienti limitati e misurabili e sia G la sua soluzione fondamentale. Allora esiste C>0 tale che

$$(1.19) \qquad \frac{C}{|x-y|^{n-2}} \leq G(x,y) \leq \frac{C^{-1}}{|x-y|^{n-2}}, \quad x,y \ R^n,\ x \neq y.$$

Il confronto della (1.19) con le osservazioni che seguono la (1.18) rivela la profonda differenza esistente fra il caso ellittico e quello parabolico.

Alla luce di tali considerazioni va ricercata una stima della soluzione fondamentale che, nel caso parabolico, costituisca un sostituto ad hoc della (1.18). Questo punto di vista era stato adottato nei lavori [GL1] e [GL2]. Più precisamente, uno dei principali risultati in [GL2] si legge:

*sia* $\Gamma(x,y,t) = \Gamma(x,t;y,0)$ *la soluzione fondamentale di* L *in* (1.1) *con polo in* (y,0). *Allora per* x *vicino a* y *e* $t\to 0^+$ *si ha lo sviluppo asintotico*

$$(1.20) \qquad \Gamma(x,y,t) \sim (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{d^2(x,y,t)}{4t}\right) \sum_{j=0}^{\infty} t^j u_j(x,y,t),$$

*dove* d(x,y,t) *denota la distanza Riemanniana fra* x *e* y *nella metrica generata da* $A^{-1}(\cdot,t)$ *su* $R^n$. *Uno sviluppo analogo vale per le derivate di* $\Gamma$.

Una conseguenza notevole della (1.20) è la seguente. Sia

$$(1.21) \qquad M = \operatorname{div}(B(x,t)\nabla_x) - D_t$$

un altro operatore come L in (1.1) a coefficienti $C^\infty$, e denotiamo con $\Gamma_L$ e $\Gamma_M$

rispettivamente le soluzioni fondamentali di L ed M. Se in un punto $z_0 \in R^{n+1}$ si ha

(1.22) $A(z_0) = B(z_0)$,

allora esistono due costanti $r_0$, $C > 0$ tali che

(1.23) $$C\Gamma_M(zo;\zeta) \leq \Gamma_L(z_0;\zeta) \leq C^{-1}\Gamma_M(zo;\zeta)$$

per ogni $\zeta \in \Omega_r^L(z_0) = \{\zeta \in R^{n+1} \mid \Gamma_L(z_0;\zeta) > (4\pi r)^{-n/2}\}$,

per ogni $r \leq r_0$. In particolare, se $K_{z_0}$ è la soluzione fondamentale dell'operatore

$$\mathrm{div}(A(z_0)\nabla_x) - D_t ,$$

ottenuto da L in (1.1) congelandone i coefficienti in $z_0$, si ha da (1.23)

(1.25) $$CK_{z_0}(z_0-\zeta) \leq \Gamma(z_0;\zeta) \leq C^{-1}K_{z_0}(z_0-\zeta)$$

in un'opportuna palla parabolica. La (1.25) costituisce il sostituto della (1.19) a cui sopra s'è accennato.

Per un operatore soddisfacente solo le ipotesi (1.2)-(1.7) non sussiste alcuno sviluppo del tipo (1.20). Ciò nondimeno, in [FGL] si dimostra che (1.25) vale con una costante C che dipende ora solo da $\nu$ in (1.2) e dal $C^1$-Dini modulo di continuità di coefficienti in (1.6). La dimostrazione di tale risultato si basa su un opportuno adattamento di alcune idee usate in [L] da E. Lanconelli. In quel lavoro vengono costruite due funzioni q e p che, si dimostra, sono rispettivamente sotto- e sopra-soluzione di un operatore in forma nondivergenziale a coefficienti Dini continui. Tali funzioni controllano poi rispettivamente dal basso e dall'alto la soluzione fondamentale dell'operatore in una

palla parabolica e, in quest'ultima, sono equivalenti alla soluzione fondamentale dell'operatore a coefficienti costanti ottenuto congelando i coefficienti. In [FGL] si riprendono le argomentazioni di [L] modificandole opportunamente. Lo schema della prova di (1.25) è il seguente.

<u>1° passo</u> $L(q(\cdot;\zeta)) \geq 0$ in $R^n x(\tau,\tau+T)$

dove $T = T(L) > 0$ è opportuno.

<u>2° passo</u> $C_0 K_{z_0}(z_0-\zeta) \leq q(z_0;\zeta)$ in una palla parabolica.

<u>3° passo</u> $q(z_0;\zeta) \leq C_1 \Gamma(z_0;\zeta)$ in una palla parabolica.

Se ne conclude che in una palla parabolica

(1.26) $CK_{z_0}(z_0-\zeta) \leq \Gamma(z_0;\zeta)$,

per un'opportuna costante C>0. La (1.26) dà la prima disuguaglianza in (1.25). Simili argomenti, utilizzando l'altra funzione di confronto p a cui sopra s'è accennato, permettono di dimostrare la seconda disuguaglianza in (1.25). Avendo a disposizione la (1.25) è facile far vedere che, se vale (1.22), allora si ha (1.23).

Una conseguenza notevole di (1.23) è data dal seguente

<u>Teorema 1.2.</u> *Siano* L *ed* M *due operatori come in* (1.1), (1.21) *con coefficienti* $C^1$*- Dini continui, e sia* $D \subset R^{n+1}$ *un sottoinsieme aperto e limitato. Se per un certo* $z_0 \in \partial D$ *si ha*

$$A(z_0) = B(z_0),$$

*allora* $z_0$ *è* L*- regolare se e solo se esso è* M*- regolare.*

<u>Corollario 1.1.</u> *Siano* L *e* D *come nel Teorema* 1.2. *Allora* $z_0$ $\partial D$ *è* L-*regolare se e solo se esso è* $L_{z_0}$ -*regolare, dove* $L_{z_0} = \mathrm{div}(A(z_0)\nabla_x) - D_t$.

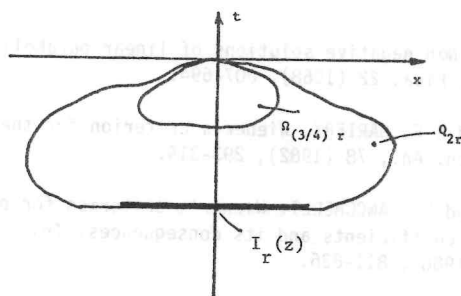
Il Teorema 1.2 e il Corollario 1.1 estendono al caso degli operatori a coefficienti $C^1$-Dini analoghi risultati ottenuti in [GL1] nel caso $C^\infty$.

A chiusura di questa nota diamo alcuni cenni sulla dimostrazione del Teorema 1.1. Come sopra accennato in questa si fa uso degli strumenti sviluppati nel caso $C^\infty$ in [GL1] e [GL2]: varie formule di rappresentazione di soluzioni di Lu = 0, principio di Harnack forte, possibilità di approssimare una funzione L-superparabolica con una successione monotona di funzioni L-superparaboliche e regolari, ecc. Per utilizzare tali strumenti si regolarizzano opportunamente i coefficienti dell'operatore L dopo di che si procede come nel caso $C^\infty$ alla dimostrazione del Teorema 1.1. Alla fine un passaggio al limite permetterebbe di ottenere il risultato desiderato se tutte le stime utilizzate dipendessero solo qualitativamente dalla regolarità $C^\infty$ dei coefficienti. Sfortunatamente, ciò si verifica per tutti i risultati in [GL1] e [GL2], tranne uno. S'è richiamato sopra il principio di Harnack forte dimostrato in [GL1]. Questo è un risultato quantitativo che si può così enunciare.

<u>Teorema 1.3.</u> *Sia* $u > 0$ *una soluzione di* $Lu=0$ *in* $Q_{2r}$, *con* $u \in C(\partial Q_{2r}(z) \setminus \{z\})$. *Allora esiste una costante* $\Lambda > 0$ *tale che*

$$(1.27) \qquad \fint_{I_r(z)} u \, dx \le \Lambda \inf_{\Omega_{\frac{3}{4}r}(z)} u.$$

Qui $Q_{2r}(z) = \Omega_{2r}(z) \cap \{\zeta \in R^{n+1} \mid t-3r < \tau < t\}$, mentre

$I_r(z) = \{\zeta \quad R^{n+1} \mid \tau = t-3r, \ |x-\xi|^2 \le \alpha(t-\tau) \ln\left(\frac{\beta r}{t-r}\right)\}$, con $\alpha, \beta > 0$ opportuni. La geometria di $Q_{2r}(z)$, $I_r(z)$ e $\Omega_{\frac{3}{4}r}(z)$ è rappresentata nella seguente figura.

Il Teorema 1.3 gioca un ruolo chiave nella dimostrazione della sufficienza nel Teorema 1.1. Nella prova della (1.27) in [GL1] si adopera lo sviluppo asintotico (1.20). Ciò fà sì che la costante $\Lambda$ in (1.27) dipenda quantitativamente dalla regolarità $C^{\infty}$ dei coefficienti. Usando il Teorema 1.2 in [FGL] si dimostra che per operatori a coefficienti $C^1$-Dini vale il Teorema 1.3 con una costante dipendente solo dal $C^1$-Dini modulo di continuità. Ciò permette di portare a termine il passaggio al limite a cui sopra s'è accennato, così completando la dimostrazione del criterio di Wiener.

BIBLIOGRAFIA

[A] D.G. ARONSON, Non negative solutions of linear parabolic equations, ann. Sc. Norm. Sup, Pisa, 22 (1968), 607-694.

[EG] L.C. EVANS and R.F. GARIEPY, Wiener's criterion for the heat equation, Arch. Rat. Mech. An., 78 (1982), 293-314.

[GL1] N. GAROFALO and E. LANCONELLI, Wiener's criterion for parabolic equations with variable coefficients and its consequences, Trans. Ann. Math. Soc., vol. 308(2) (1988), 811-836.

[GL2] N. GAROFALO and E. LANCONELLI, Asymptotic behavior of fundamental solutions and potential theory of parabolic operators with variable coefficients, apparirà su Matem. Annalen.

[FGL] E.B. FABES, N. GAROFALO and E. LANCONELLI, Wiener's criterion for divergence form parabolic operators with $C^1$-Dini continuous coefficients, preprint.

[L] E. LANCONELLI, Sul confronto della regolarità dei punti di frontiera rispetto ad operatori lineari parabolici diversi, Ann. Mat. Pura e Appl., 114 (1977), 207-227.

[LSW] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA and H. WEINBERGER, Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 17 (19637, 45-79.

[P ] I. PETROVSKI, Zur ensten Randwertanfgabe der Warmeleitungsgleichung, Composition Math., 1 (1935), 383-419.

[W] N. WEINER, The Dirichlet problem, J. Math. and Phys., 3 (1924), 127-146.